

Тренувальні вправи з алгебри на літо (після 9 класу)

Тема 1: Нерівності. Доведення нерівностей.

1. Чому дорівнює найменший цілий розв'язок системи нерівностей

$$\begin{cases} \frac{2x}{5} - \frac{x-1}{3} < 1, \\ 3,6x < 1 + 5,6x? \end{cases}$$

2. Розв'яжіть нерівність $\frac{6x+1}{6} - \frac{5x+4}{4} \geq -\frac{1}{3}$.

3. Розв'яжіть систему нерівностей $\begin{cases} (x+3)(x-1) < x^2 - x + 9, \\ \frac{5x+3}{2} - 1 \geq 3x. \end{cases}$

4. Розв'яжіть нерівність $0,3 \leq \frac{3-4x}{6} \leq 0,5$.

5. Доведіть, що при $a \geq -1$ виконується нерівність $a^3 + 1 \geq a^2 + a$.

6. Доведіть, що $5a^2 + 4a - 2ab + b^2 + 2 > 0$ при всіх дійсних значеннях a і b .

7. Для додатних чисел a і b доведіть нерівність:

$$(a^2 + b^2) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4\sqrt{ab}.$$

8. Для довільних дійсних чисел a і b доведіть нерівність:

$$a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b.$$

Тема 2: Квадратична функція. Побудова графіків функцій.

1. Побудуйте графік функції $y = x^2 + 6x + 5$. Користуючись графіком, знайдіть проміжок зростання і проміжок спадання функції.

2. При яких значеннях a і c вершина параболи $y = ax^2 + 6x + c$ знаходиться в точці $A(1; 7)$?

3. Побудуйте графік функції $y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} - \frac{4x - x^2}{x}$.

4. При якому значенні c найбільше значення функції $y = -0,5x^2 + 4x + c$ дорівнює -2 ?

5. Побудуйте графік функції $y = \sqrt{x^2} + 2x - 3$. Користуючись графіком, укажіть проміжки зростання і проміжки спадання функції.

6. Побудуйте графік функції $y = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2} + \dots$, де $x > 0$.

7. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} \frac{2}{x}, & \text{якщо } x < -2, \\ 3 - x^2, & \text{якщо } -2 \leq x \leq 1, \\ \frac{2}{x}, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$

8. Знайдіть область визначення функції $y = \frac{6}{\sqrt{6x-5}} - \frac{1}{|x|-1}$.

9. Побудуйте графік функції $y = x^2 - 4|x| + 3$.

10. Побудуйте графік функції $y = 2x - x^2$. Користуючись графіком, знайдіть:

1) область значень даної функції;

2) проміжок зростання функції.

Тема 3: Квадратні нерівності. Метод інтервалів.

1. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{6x - x^2} + \frac{3}{\sqrt{x-3}}$.

2. Знайдіть область визначення функції $y = \sqrt{18 + 3x - x^2} - \frac{5}{x-4}$.

3. Знайдіть область визначення функції: $y = \sqrt{48 + 2x - x^2} + \frac{4}{x^2 - 36}$.

4. Знайдіть множину розв'язків нерівності $\sqrt{9 - x^2} (x^2 + x - 2) \leq 0$.

5. Розв'яжіть нерівність $\frac{x^2 - |x| - 12}{x-3} \geq 2x$.

6. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $\frac{(x^2 - 6x + 9)(2 - x)}{(x+1)^3(x+2)} \geq 0$.

Тема 4: Системи рівнянь та нерівностей з двома змінними.

1. Розв'язати систему рівнянь:
$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{34}{15}, \\ x^2 + y^2 = 34. \end{cases}$$
2. Два робітники, працюючи разом, можуть виконати замовлення за 12 днів. Вони пропрацювали разом 10 днів, і один з них захворів. Тоді другий робітник закінчив виконувати замовлення через 5 днів, працюючи один. За скільки днів кожен робітник може виконати дане замовлення, працюючи самостійно?
3. Із села A в село B , відстань між якими дорівнює 20 км, вирушив пішохід. Через 2 год із села A в тому самому напрямі вирушив велосипедист зі швидкістю 15 км/год, який наздогнав пішохода, передав йому пакет і поїхав у село A з тією самою швидкістю. Пішохід прийшов у B , а велосипедист повернувся в A одночасно. Знайдіть швидкість руху пішохода.
4. Побудуйте на координатній площині множину точок $(x; y)$, координати яких задовольняють нерівність $||x| - y| \geq 1$.
5. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} x + y - xy = 1, \\ x + y + xy = 9. \end{cases}$$
6. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} 4x^2 - 2xy + y^2 = 4, \\ 6x^2 - 3xy - y^2 = -4. \end{cases}$$
7. Побудуйте графік нерівності $x^2 - 4|x| + y^2 - 4|y| + 4 \leq 0$.
8. Зобразити множину точок, що задовольняють систему нерівностей і обчислити площу отриманої фігури
$$\begin{cases} |x| + |y| \leq 1, \\ x^2 + (y - 1)^2 \leq 1. \end{cases}$$

Тема 5: Арифметична та геометрична прогресії.

1. Знайти перший член і різницю арифметичної прогресії, якщо сума третього і п'ятого членів дорівнює -2, а сума сьомого і десятого членів - 4.
1. Дана геометрична прогресія (c_n) з додатними членами $c_4 = 24; c_6 = 96$.
 - 1) Знайдіть c_1
 - 2) Скільки членів прогресії потрібно взяти, щоб їхня сума дорівнювала 45?
2. Сума n перших членів геометричної прогресії виражається формулою $S_n = 4(3^n - 1)$. Знайти її знаменник і третій член.
3. Сума нескінченної геометричної прогресії дорівнює 162, а сума чотирьох її перших членів дорівнює 160. Знайти перший член і знаменник прогресії.

4. Знайдіть суму всіх від'ємних членів арифметичної прогресії – 5,2; - 4,8; - 4,4;
...
5. Три числа складають арифметичну прогресію. Знайдіть ці числа, якщо відомо, що їхня сума дорівнює 27, і при зменшенні на 1, 3 і 2 відповідно вони складають геометричну прогресію.

Тема 6: *Елементи комбінаторики.*

1. Обчислити: а) $A_7^3 + A_6^3 + A_5^3$; б) $\frac{P_5 + P_4}{P_3}$.
2. Розв'язати рівняння: а) $\frac{(x+2)!}{x!} = 72$; б) $A_{x-4}^{x-6} = \frac{1}{60} P_{x-2}$.
3. На автостоянці залишилось 8 вільних місць. Скількома способами на ній можна розмістити 8 автомобілів?
4. Скільки п'ятицифрових чисел можна утворити з цифр 0, 1, 2, 3, 4, щоб в числі цифри не повторювалися?
5. Скільки існує семицифрових чисел?
6. Скількома способами можна розставити 4 книжки з алгебри і 3 книжки з геометрії, щоб усі книжки з геометрії стояли поруч?
7. У шухляді лежать чотири картки, на яких написано числа 1, 2, 3 і 4. Яка ймовірність того, що сума чисел, записаних на двох навмання виїнятих картках, є непарним числом?